На правах рукописи

ПИВОВАРОВА Полина Олеговна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛЯХ ХОФФА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа Магнитогорского государственного университета.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент
ЗАГРЕБИНА Софья Александровна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
КАДЧЕНКО Сергей Иванович

доктор физико-математических наук, доцент
СУКАЧЕВА Тамара Геннадьевна

Ведущая организация — Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится 17 июня 2011 г., в 14 часов, на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "15" мая 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Л.Б. Соколинский

0-788281

Общая характеристика работы

Цель и задачи работы. Рассмотрим уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3, \tag{1}$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Функция $u = u(x,t)$ показывает отклонение балки от вертикали, параметры $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, где $\alpha \cdot \beta > 0$ — свойства материала. Нас интересуют следующие задачи.

I. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + \Delta u_t = \alpha u, \tag{2}$$

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + \Delta u_t = \alpha u + \beta u^3, \tag{3}$$

$u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$; с однородными граничными условиями Дирихле

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{4}$$

II. Пусть $\mathbf{G}$ — конечный связный ориентированный граф, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j, \tag{5}$$

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + \beta u_j^3, \tag{6}$$

$u_j = u_j(x,t)$, $(x,t) = (0, l_j) \times \mathbb{R}$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ заданы условия

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{8}$$

Нашей **целью** является исследование устойчивости нулевого решения уравнений (2), (3), (5), (6). Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

---

[1] *Hoff, N.J.* Creep buckling // Aeronautic.– Quarterly 7.– 1956.– № 1.– P.1-20.

1. Найти условия, при которых нулевое решение уравнений Хоффа устойчиво.

2. Найти условия, при которых нулевое решение уравнений Хоффа асимптотически устойчиво.

3. Разработать алгоритм численного исследования неустойчивости нулевого решения уравнений Хоффа.

4. На основе данного алгоритма спроектировать и реализовать программный комплекс, использующий предложенные методы.

5. Провести вычислительные эксперименты для анализа эффективности предложенного подхода.

Качественное исследование задач (2), (4) ((3), (4)); (5), (7), (8) ((6)–(8)) облегчается тем обстоятельством, что они в подходящим образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируются к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{9}$$

для линейного

$$L\dot{u} = Mu \tag{10}$$

и полулинейного

$$L\dot{u} = Mu + N(u) \tag{11}$$

уравнений соболевского типа.

Актуальность темы. Результаты диссертации находятся на стыке трех областей математического знания — теории уравнений соболевского типа, теории устойчивости по Ляпунову и теории дифференциальных уравнений на геометрических графах.

Впервые уравнения, неразрешенные относительно старшей производной[2] (10), (11), появились в работе А. Пуанкаре в 1885 году. Систематическое их изучение началось с работ С.Л. Соболева, выполненных в 40-х годах прошлого столетия. С тех пор возникла традиция эти уравнения называть *уравнениями соболевского типа*. Данная диссертация лежит в русле научного направления, развиваемого Г.А. Свиридюком и его учениками. Главным здесь является нахождение и изучение фазовых пространств уравнений соболевского типа.

---

[2] ***Демиденко Г. В., Успенский С.В.*** **Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.**

Основы теории устойчивости были заложены А.М. Ляпуновым[3] в 1892 г. Исследованиями устойчивости уравнений соболевского типа с точки зрения инвариантных многообразий и дихотомий решений занимались Г.А. Свиридюк, А.В Келлер, О.Г. Китаева, С.А. Загребина, В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева, Т.Г. Сукачева.

Уравнение Хоффа на отрезке первым начали изучать Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев и О.А. Романова. Уравнение Хоффа на графе впервые исследовали Г.А. Свиридюк и В.В. Шеметова.

Актуальность темы диссертации заключается в качественном и численном исследовании моделей Хоффа, адекватных следующим прикладным задачам. Первая — изучение устойчивости и неустойчивости процесса выпучивания двутавровой балки, а вторая — изучение устойчивости и неустойчивости процесса выпучивания конструкции из двутавровых балок.

Методы исследования. Основными методами данного исследования являются метод фазового пространства и второй метод Ляпунова. Кроме того, в основе численных экспериментов лежит метод Галеркина.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложен метод исследования устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения в моделях Хоффа, базирующийся на втором методе Ляпунова.

2. Разработан новый алгоритм исследования неустойчивости решения уравнений Хоффа в окрестности точки нуль.

3. Выполнена реализация алгоритма исследования неустойчивости нулевого решения уравнений Хоффа в виде программного комплекса для персональных компьютеров.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней сформулированы и доказаны достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости линейных и полулинейных уравнений Хоффа, заданных в ограниченной области и на конечном связном ориентированном графе.

Практическая значимость работы заключается в том, что предложенный программный комплекс может использоваться для иллюстрации неустойчивости нулевого решения в моделях Хоффа.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлита-

---

[3] *Ляпунов, А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

мак, 2008), Десятом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Санкт-Петербург, 2009), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (г. Воронеж, 2010), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2010).

Кроме того, результаты неоднократно докладывались на семинаре по уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск); семинарах кафедры математического анализа (руководитель — доцент Т.К. Плышевская) и кафедры прикладной математики и вычислительной техники (руководитель — профессор С.И. Кадченко) в Магнитогорском государственном университете; а также семинаре «Избранные вопросы математического анализа» в Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, причем статьи [1]–[3] – в изданиях, включенных в перечень ВАК. Кроме того, имеется свидетельство о регистрации программы [4], посредством которой проводились численные эксперименты. В совместных работах научному руководителю принадлежит постановка задач.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 96 страниц. Библиография содержит 96 наименований работ отечественных и зарубежных авторов, включая работы автора.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике. В заключение введения автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту С.А. Загребиной, заведующему кафедрой уравнений математической физики проф. Г.А. Свиридюку, коллективам кафедр математического анализа МаГУ и уравнений математичексой физики ЮУрГУ, а также своей семье: дедушке Лаврентию Кузьмичу, маме Инне Лаврентьевне, брату Лаврентию Олеговичу и мужу Илье Сергеевичу.

Первая глава состоит из шести параграфов и носит пропедевтический характер. Она содержит формулировки теорем и определений, которые используются для получения основных результатов диссертации. В первом параграфе представлены основные факты теории относительно p-ограниченных операторов. Во втором — вводятся определения решения, фазового пространства, аналитических разрешающих групп операторов, а также теорема о существовании аналитических разрешающих групп операторов для уравнений вида (10). В третьем параграфе приводятся основные факты теории гладких банаховых многообразий и векторных полей на них. В четвертом параграфе представлена стандартная сводка основных результатов теории функциональных пространств и дифференциальных операторов. Шестой параграф посвящен теории устойчивости в терминах потока и функций Ляпунова. Проводится доказательство второй теоремы Ляпунова, модифицированной для случая неполных банаховых пространств.

Теорема 1. *Пусть u – стационарная точка потока S на $\mathfrak{U}$. Если для потока S существует функция Ляпунова такая, что*

(i) $V(u) = 0$;

(ii) $V(v) \geq \varphi(\|v - u\|)$;

где φ – строго возрастающая непрерывная функция такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r) > 0$ при $r \in \mathbb{R}_+$, то точка u устойчива.

(iii) Выполнены условия (i) и (ii) и существует строго возрастающая непрерывная функция ψ такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(r) > 0$ при $r \in \mathbb{R}_+$, причем $\dot{V}(v) \leq -\psi(\|v - u\|)$, тогда точка u асимптотически устойчива.

Вторая глава посвящена моделям Хоффа в области. Она состоит из трех параграфов. В **п. 2.1** рассмотрена задача

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{13}$$

для уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + \Delta u_t = \alpha u. \tag{14}$$

Чтобы редуцировать задачу (12)–(14) к задаче (9), (10) возьмем пространства $\mathfrak{U} = L_2, \mathfrak{F} = W_2^{-1}$ (все пространства определены в области Ω). Операторы L и M определим следующим образом:

$$\langle Lu, v\rangle = \int\limits_{\Omega}(u_x v_x + (\lambda - \lambda_0)uv)dx, \ \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

$$\langle Mu, v\rangle = -\alpha \int\limits_{\Omega} uv dx, \ \forall u, v \in L_2,$$

где $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение в L_2.

Теорема 2. *(i) При всех $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ фазовым пространством задачи (12)–(14) служит пространство L_2.*

(ii) При всех $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_0$ фазовым пространством задачи (12)–(14) служит подпространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in L_2 :< u, \varphi >= 0\}$.

Доказано, что на $\mathfrak{P}$ существует поток S, определяемый формулой

$$S(t,u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} Lue^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур γ ограничивает L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M, а точка нуль является стационарной точкой этого потока.

Если $\lambda < \lambda_0$, тогда функцию Ляпунова определим как

$$V(u) = \int\limits_\Omega (u_x^2 + (\lambda - \lambda_0)u^2)dx,$$

$V(u) = \lambda \|u\|^2$ и $V(0) = 0$. Поэтому, в силу теоремы 1, точка нуль устойчива по Ляпунову, а в силу $\dot{V}(u) = -2\alpha \|u\|^2$ получаем асимптотическую устойчивость точки нуль.

Если $\lambda = \lambda_0$, то введем в пространстве $\mathfrak{U}^1$ норму $\|u\|_1$, эквивалентную норме из L_2. В силу теорем вложения Соболева $\|u\|_1 \geq c\|u\|$, где $c \in \mathbb{R}_+$ — константа вложения. Зададим функцию Ляпунова как

$$V(u) = \|u\|.$$

Таким образом, получим устойчивость и асимптотическую устойчивость точки нуль. Следовательно, доказана

Теорема 3. *Пусть $\lambda \in [0, \lambda_0]$, тогда при любом $\alpha \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ нулевое решение задачи (12)–(14) асимптотически устойчиво.*

В **п. 2.2** рассматривается задача (12), (13) для уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + \Delta u_t = \alpha u + \beta u^3. \qquad (15)$$

Для редукции задачи (12), (13), (15) к задаче (9), (11), вводятся в рассмотрение пространства $\mathfrak{U} = L_4$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$ (все пространства определены в области Ω); и операторы

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)dx, \ \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

$$L = A - (\lambda - \lambda_0),$$

$$\langle Mu, v\rangle = -\alpha \int\limits_{\Omega} uvdx, \ \forall u, v \in L_2,$$

$$\langle N(u), v\rangle = -\beta \int\limits_{\Omega} u^3 vdx \ \ \forall u, v \in L_4.$$

Теорема 4. *(i) Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$, тогда при любых $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством уравнения (15) служит все пространство $\mathfrak{U}$.*

(ii) Пусть $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда при любых $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством уравнения (15) служит простое банахово C^∞-многообразие $\mathfrak{M}$ моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k\rangle = 0, \ \lambda = \lambda_k\}$.

Пусть $\lambda \in [0; \lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. В этом случае определим функцию Ляпунова как

$$V(u) = \int\limits_{\Omega} (u_x^2 + (\lambda - \lambda_0)u^2)dx.$$

$V(u) = (\lambda - \lambda_0) \|u\|^2$ и $V(0) = 0$. Поэтому, в силу теоремы 1 точка нуль устойчива по Ляпунову. В силу $\dot{V}(u) = -\beta \|u\|^4$ получим асимптотическую устойчивость точки нуль.

При $\lambda = \lambda_0$ зададим функцию Ляпунова как $V(u) = \|u\|$. Здесь $\|u\|$ – норма, эквивалентная норме из L_4. В силу теоремы 1 получаем устойчивость точки нуль.

Теорема 5. *(i) Пусть $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$, тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ нулевое решение уравнения (15) асимптотически устойчиво.*

(ii) Пусть $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\lambda = \lambda_0$, тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ нулевое решение уравнения (15) устойчиво.

Пункт 2.3 содержит описание алгоритма программы, разработанной в вычислительной среде Maple, которая, опираясь на метод Галеркина, позволяет иллюстрировать неустойчивость нулевого решения задачи (12), (13), (15) и строит графические изображения этого решения при различных значениях параметров (рис. 1).

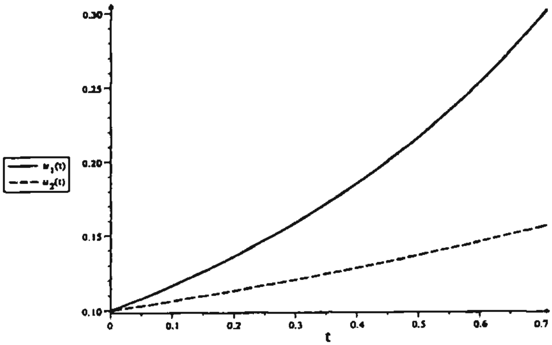

Рис. 1. Неустойчивость решения в окрестности точки нуль при $\alpha = 3, \beta = 2, \lambda = 6, \lambda_0 = 5$

Третья глава посвящена моделям Хоффа на конечном связном ориентированном графе. Она состоит из трех параграфов. В **п. 3.1** рассмотрено уравнение

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j \tag{16}$$

с условиями

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{17}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{18}$$

Редуцируем задачу (16)–(18) к задаче (9), (10). Введем в рассмотрение множество

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots g_j, \ldots) : g_j \in L_2(0, l_j)\},$$

со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\langle g, h\rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx \text{ и } \|g\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j^2 dx.$$

Введем еще банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ причем выполнено (17)}\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Построим операторы

$$< Lu, v >= \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + (\lambda - \lambda_0) u_j v_j) dx,$$

$$< Mu, v >= -\alpha < u, v >,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$.

Теорема 6. *(i) При всех* $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda \in [0, \lambda_0)$ *фазовым пространством* $\mathfrak{P}$ *задачи (16)–(18) служит пространство* $\mathfrak{U}$.

(ii) При всех $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda = \lambda_0$ *фазовым пространством* $\mathfrak{P}$ *задачи (16)–(18) служит подпространство* $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi >= 0\}$.

Доказано, что на $\mathfrak{P}$ существует поток S, определяемый формулой

$$S(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L u e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур γ ограничивает L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Очевидно, точка нуль является стационарной точкой этого потока.

Пусть сначала $\lambda \in [0; \lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. В этом случае функцию Ляпунова определим следующим образом:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda - \lambda_0) u_j^2) dx.$$

Очевидно, $V(u) \geq (\lambda - \lambda_0) \|u\|^2$ и $V(0) = 0$, поэтому в силу теоремы 1 точка нуль устойчива. Кроме того,

$$\dot{V}(u) = -2\alpha \|u\|^2,$$

что в силу теоремы 1 означает асимптотическую устойчивость точки нуль.

При $\lambda = \lambda_0$ фазовым пространством задачи (16)–(18) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$ с нормой

$$\|u\|_1^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^2 dx,$$

Зададим функцию Ляпунова $V(u) = \|u\|_1^2$. Отсюда получаем устойчивость точки нуль. Аналогично предыдущим рассуждениям получаем асимптотическую устойчивость точки нуль.

Теорема 7. *При всех $\alpha, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0]$ стационарная точка нуль задачи (16)–(18) является асимптотически устойчивой.*

В п. 3.2. рассмотрено уравнение

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + \beta u_j^3 \tag{19}$$

с условиями (17)–(18).

Возьмем $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + \lambda_0 u_j v_j)dx, \ u, v \in \mathfrak{U}.$$

Далее, возьмем $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ и построим операторы $L = A - \lambda$, $M = -\alpha\mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ в данном случае есть оператор вложения $\mathbb{I} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Введем в рассмотрение банаховы пространства

$$\mathbf{L_4(G)} = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in \mathbf{L_4}(0, l_j)\},$$

$$\mathbf{L_{\frac{4}{3}}(G)} = \{h = (h_1, h_2, \ldots, h_j, \ldots) : h_j \in \mathbf{L_{\frac{4}{3}}}(0, l_j)\}.$$

Возьмем $\beta \in \mathbb{R}$ и построим оператор $N : \mathbf{L_4(G)} \to \mathbf{L_{\frac{4}{3}}(G)}$

$$\langle N(u), v \rangle = -\beta \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^3 v_j dx, dx, \ u, v \in \mathbf{L_4(G)}.$$

Теорема 8. *(i) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$ пространство $\mathfrak{U}$ является фазовым пространством задачи (17)–(19).*

(ii) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \{\lambda_k\}$, фазовым пространством задачи (17)–(19) является множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \alpha \langle u, \varphi_k \rangle + \beta \langle u^3, \varphi_k \rangle = 0, \ \lambda_k = \lambda\}.$$

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$, то в силу теоремы 8 задача (17)–(19) задает поток на банаховом пространстве $\mathfrak{U}$. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \{\lambda_k\}$, то задача (17)–(19) задает поток на простом банаховом C^∞-многообразии $\mathfrak{M}$.

Пусть $\lambda \in [0, \lambda_0)$. Определив функцию Ляпунова как

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda_0 - \lambda)u_j^2)dx,$$

мы сразу получим выполнение условия (i) теоремы 1. В силу непрерывности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ мы имеем $V(u) \geq (c||u||)^2$, где $c \in \mathbb{R}_+$ – константа вложения. Таким образом, условие (ii) тоже выполнено. Наконец заметим, что в силу эквивалентности нормы в $\mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ имеем $\dot{V}(u) \leq -2\beta(c_1||u||)^4$, что показывает выполнение условия (iii).

В случае $\lambda = \lambda_0$ определим функцию Ляпунова как

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{1jx}^2 dx.$$

Условие (i) теоремы 1 выполнено. Кроме того, $V^{1/2}$ определяет норму на $\mathfrak{U}^1$, эквивалентную индуцированной из $\mathfrak{U}$. Значит, $V(u) \geq (c||u||)^2$ в силу теоремы вложения. Отсюда справедлива

Теорема 9. *(i) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ нулевое решение задачи (17)–(19) асимптотически устойчиво.*

(ii) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_0$ нулевое решение задачи (17)–(19) устойчиво.

Пункт 3.3 содержит описание программы, разработанной в вычислительной среде Maple, которая позволяет иллюстрировать неустойчивость нулевого решения первого приближения задачи (17)–(19) и строит графическое изображение этого решения при различных значениях параметров (рис. 2).

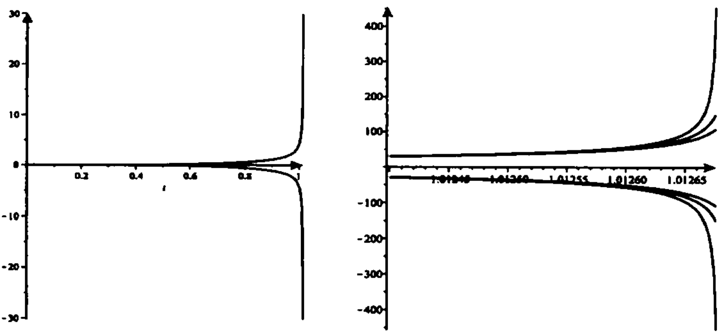

Рис. 2. Неустойчивость решения в окрестности точки нуль при $\alpha = 5, \beta = 2, \lambda = 6, \lambda_0 = 5$

Результаты, выносимые на защиту:

1. Найдены условия, при которых нулевое решение уравнений Хоффа устойчиво.

2. Найдены условия, при которых нулевое решение уравнений Хоффа асимптотически устойчиво.

3. Разработан алгоритм численного исследования неустойчивости нулевого решения уравнений Хоффа.

4. Спроектирован и реализован программный комплекс для иллюстрации неустойчивости нулевого решения уравнений Хоффа.

5. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов, методов и подходов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Свиридюк Г.А.* Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – Самара, 2010. – № 1 (15).– С. 6–15.

2. *Загребина, С.А.* Устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 11–16.

3. *Пивоварова, П.О.* Неустойчивость решений уравнений Хоф-фа на графе. Численный эксперимент / П.О. Пивоварова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. — № 4 (221), вып. 7. – С. 71–74.

Другие научные публикации:

4. Программа численного исследования неустойчивости нулевых решений уравнений Хоффа: свидетельство 2011613353 / Пивоварова П.О. (RU); правообладатель ГОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет". — 2011611508; заявл. 09.03.2011; зарегестр. 28.04.2011, Реестр программ для ЭВМ.

5. *Пивоварова, П.О.* Неустойчивость решений уравнений Дэвиса / П.О. Пивоварова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: труды междунар. науч. конф., 24 июня – 28 июня 2008 г., г. Стерлитамак. Уфа, 2008.– Т.1. – С. 153–158.

6. *Пивоварова, П.О.* О неустойчивости решений эволюционных уравнений соболевского типа на графе / П.О. Пивоварова // Вестн. Юж. Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2008.– № 15 (115). – вып. 1. – С. 64–68.

7. *Загребина, С.А.* Устойчивость решений уравнения Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 330–331.

8. *Пивоварова, П.О.* Об устойчивости линейных уравнений Хоффа на графе / П.О. Пивоварова // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тез. докл., Суздаль, 2-7 июля 2010 г.– М., 2010. – С. 148–149.

9. *Пивоварова, П.О.* Об устойчивости линейного уравнения Хоффа в области / П.О. Пивоварова // Вестн. Магнитогорского гос. ун-та. Сер.: Математика. – Магнитогорск, 2010. – вып. 12.– С. 58–64.

10. *Загребина, С.А.* Второй метод Ляпунова в нормированных пространствах / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. Воронеж, 2010.– С. 59–60.

11. *Загребина, С.А.* Устойчивость и неустойчивость решений уравнений Хоффа. Численный эксперимент / С.А.Загребина, П.О. Пивоварова // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. - Новосибирск, 2010.– С.88–94.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 11.05.2011. Формат 60×84 1/16.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 0,70. Тираж 150 экз. Заказ 146/277.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр.им. В.И. Ленина, 76.